Перемещение, координата и путь при равноускоренном движении

1

Вывод формулы:

$$\Delta r_x = \langle v \rangle \cdot t \qquad \langle v \rangle = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \qquad v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$\Delta r_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot t = \frac{v_{0x} + (v_{0x} + a_x t)}{2} \cdot t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$\boxed{\Delta r_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}}$$

$$\Delta r_x = x - x_0$$

$$\boxed{x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}}$$

Основной закон кинематики для равноускоренного движения

Δr_x – проекция перемещения тела, м

x – координата тела, м

x_0 – начальная координата тела, м

v_x– проекция скорости тела на ось x, м/с

v_{0x}– проекция начальной скорости тела на ось x, м/с

a_x– проекция ускорения тела на ось x, м/с^2

t – время, с

2

Вывод формулы:

$$\Delta r_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \qquad a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$$

$$\Delta r_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} = v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \frac{a_x \left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2}{2} = \frac{v_{0x} v_x - v_{0x}^2}{a_x} + \frac{a_x \frac{v_x^2 - 2 v_x v_{0x} + v_{0x}^2}{a_x^2}}{2} =$$

$$= \frac{2 v_{0x} v_x - 2 v_{0x}^2}{2 a_x} + \frac{v_x^2 - 2 v_x v_{0x} + v_{0x}^2}{2 a_x} = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}$$

$$\boxed{\Delta r_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}}$$

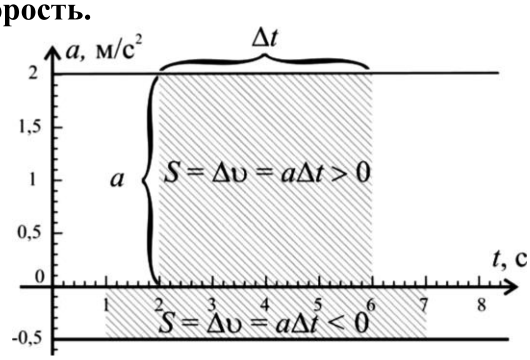
ПРИМЕР. Рассмотрим движение некоторого тела. Пусть начальная координата тела равна $x_0 = 10$ м (на начальном этапе решения начальная координата нам не нужна, однако чуть позже мы о ней вспомним), начальная скорость тела $\vartheta_0 = 4$ м/с, ускорение, с которым двигается тело, $a = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Зависимость скорости от времени будет иметь вид

$$\vartheta = \vartheta_0 + at = 4 + 2t.$$

Зная уравнение зависимости скорости тела от времени, мы можем решить и обратную задачу – по данному уравнению определить начальную скорость и ускорение тела. Например, нам дано уравнение $\vartheta = 3 - t$.

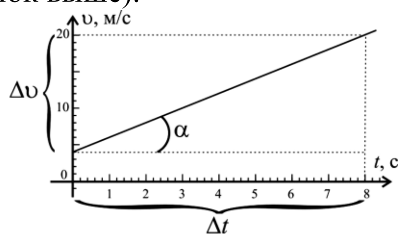
Начальная скорость равна свободному коэффициенту. В нашем случае $\vartheta_0 = 3$ м/с. Ускорение тела — это коэффициент перед t. В нашем случае $a = -1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (не забываем, что любая переменная равна переменной умноженной на 1; например, $x = x \cdot 1$). Получается, что тело двигается в вдоль оси OX (начальная скорость положительна) и замедляется (ускорение отрицательно). При ускоренном движении ускорение тела всегда будет постоянной величиной.

При этом площадь под графиком ускорения (см. рисунок) будет равна величине, на которую тело изменило свою скорость.



Ускорение так же может быть отрицательным (например, когда тело тормозит). Тогда изменение скорости тоже будет отрицательной величиной (см. рисунок выше).

Возвращаемся к примеру. Графи к зависимости скорости тела от времени $\vartheta = 4 + 2t$ будет иметь вид, представленный на следующем рисунке. Из графика достаточно просто найти ускорение, с которым двигается тело (алгоритм аналогичен алгоритму, приведенному в предыдущей теме). Ускорение будет численно равно тангенсу угла наклона графика к оси времени



$$a = tg\alpha = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\Delta t} = \frac{20 - 4}{8} = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Чем больше угол α, который образует график скорости с осью времени, то есть чем больше наклон графика (**крутизна**), тем больше ускорение тела. Соответственно, если у двух графиков зависимости скорости от времени будут одинаковые углы наклона к оси времени, значит ускорения этих двух тел будут равны.

Путь при равноускоренном движении (**если тело не меняло направление своего движения**) рассчитывается по формуле

$$S = \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Вспомним, что путь равен изменению координаты тела $S = x - x_0$, следовательно

$$x - x_0 = \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2}$$

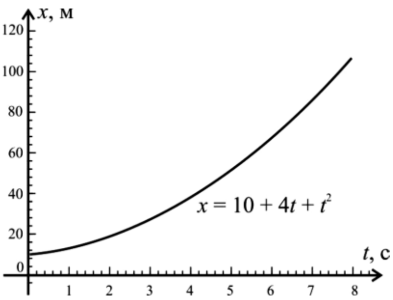
Откуда получаем **зависимость координаты тела от времени при ускоренном движении**

$$x = x_0 + \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Если движение равномерное ($a = 0$), то получаем формулу для изменения координаты при равномерном движении (см. предыдущую тему)

$$x = x_0 + \vartheta_0 t$$

То есть полученная нами формула универсальна (подходит для любого вида движения). Таким образом, зависимость координаты от времени при ускоренном движении для нашего примера имеет вид (вот теперь вспоминаем о значении начальной координаты тела)



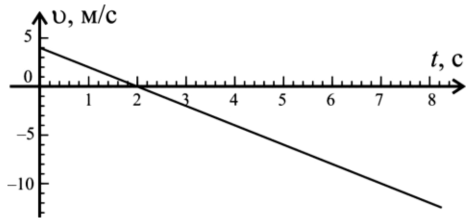
$$x = x_0 + \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2} = 10 + 4t + \frac{2t^2}{2} = 10 + 4t + t^2$$

Графически зависимость представлена на рисунке и представляет собой параболу.

Рассмотрим еще один пример. Например, $x_0 = 10$ м, $\vartheta_0 = 4\ \frac{м}{с}$, $a = -2\ \frac{м}{с^2}$. Зависимость скорости от времени будет иметь вид

$$\vartheta = \vartheta_0 + at = 4 - 2t$$

То, что ускорение отрицательно, еще не значит, что движение тела всегда будет замедленным.



Посмотрите на график зависимости скорости от времени. Из графика видно, что в момент времени 2 секунды скорость тела стала равна нулю, а потом скорость тела начинает увеличиваться. Правда, ее значения будут отрицательными. Что это означает?

С момента времени 0 с до момента времени 2 с тело действительно двигалось замедленно с ускорением 2 м/с^2. В момент времени 2 с тело на мгновенье остановилось и начало двигаться в **обратную** сторону **ускоренно**.

Поэтому, в случаях, когда ускорение отрицательно, нельзя всегда однозначно сказать, что это будет за движение. Всегда важно знать, куда направлена скорость тела в данный момент времени. Если начальная скорость положительна (как в нашем примере), то сначала движением замедленное, а потом ускоренное. Если начальная скорость отрицательна, то движение будет только ускоренным. Просто тело будет двигаться в сторону, противоположную положительному направлению выбранной нами оси. Аналогично, если $a > 0$, это не означает, что движение тела будет ускоренным. Все зависит от направления начальной скорости тела и ускорения тела.

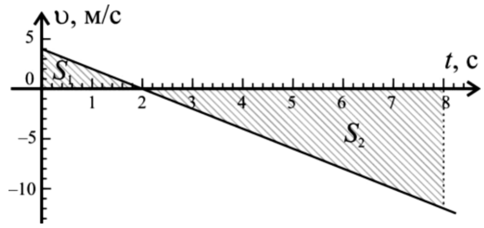


График скорости позволяет так же, как и для равномерного движения определить **проекцию перемещения *S*** тела за некоторое время t и пройденный за это время **путь**. Проекция перемещения численно равна площади под графиком скорости (см. рисунок). При этом если эта площадь находится **под** осью времени, то знак проекции **отрицательный**, **над** – **положительный**. Таким образом, для нашего случая (перемещение мы находим как площадь треугольника – половина произведения основания (промежуток времени) на высоту изменение скорости))

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = -32 \text{ м}$$

То есть тело переместилось на 32 м относительно начального положения **против** выбранной нами оси. Точно такой же результат для перемещения получим, если применим формулу

$$S = \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2} = 4 \cdot 8 + \frac{-2 \cdot 8^2}{2} = -32 \text{ м}$$

Путь будет равен алгебраической **сумме** перемещений (напомню, что путь только увеличивается)

$$L = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 40 \text{ м}$$

Зависимость координаты от времени для такого движения будет выражена соотношением

$$x = x_0 + \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2} = 10 + 4t - \frac{2t^2}{2} = 10 + 4t - t^2$$

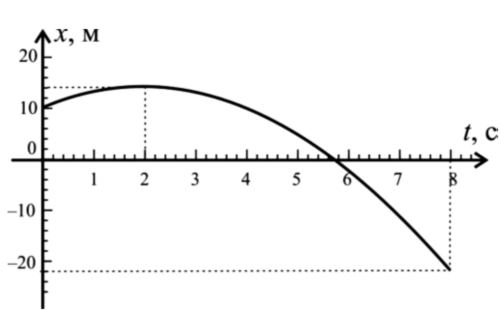


График зависимости координаты от времени представлен на рисунке. Обратите внимание на то, что ветви параболы смотрят вниз. Это значит, что в момент времени 2 секунды имея координату 14 м (вершина параболы) тело остановилось, развернулось и начало ускоренное движение в обратном направлении. Однако часто встречаются и обратные задачи. Например, дано уравнение движения $x = 10 - 5t^2$.

Стоит задача описать это движение. Перед решением немного изменим уравнение (при этом мы не внесем изменения, влияющие на условие задачи)

$$x = 10 + 0 \cdot t - \frac{10t^2}{2}$$

А теперь сравним наше уравнение с эталонным (лучше записывать их друг под другом)

$$x = x_0 + \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$x = 10 + 0 \cdot t - \frac{10t^2}{2}$$

Очевидно, что $x_0 = 10$ м. Коэффициент перед t равен нулю (если не изменять вид уравнения, то можно просто обратить внимание на то, что слагаемого с t нет). Следовательно, $\vartheta_0 = 0$. Далее (если не переписать в измененном виде) обычно все делают типичную ошибку и говорят, что $a = -5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (смотрим на оригинал уравнения $x = 10 - 5t^2$).

На самом деле перед t^2 стоит **ПОЛОВИНА УСКОРЕНИЯ** (именно поэтому мы и переписали уравнение в измененном виде), следовательно, $a = -10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Теперь найти зависимость скорости от времени и перемещения от времени, а так же построить графики этих зависимостей не составит труда.

ПРИМЕР. *Движение тела задано уравнением* $x = 4t - 2 + t^2$. *Сделать пояснительные рисунок и описать движение тела. Найти его основные характеристики*.

Для начала перепишем уравнение в стандартном виде $x = -2 + 4t + t^2$. Теперь сравним наше уравнение движения с эталонным. Легко увидеть, что $x_0 = -2$ м, $\vartheta_{0x} = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, a = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (не сделайте очень распространенную ошибку, не потеряйте двойку!!!) Это значит, что тело начало двигаться из точки, лежащей на 2 м левее начала координат, по оси OX со скоростью 4 м/с. Ускорение тела также направлено по оси ОХ.

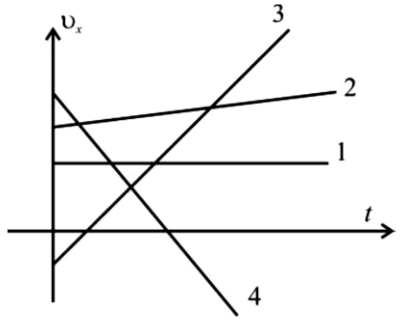
Так как начальная скорость и ускорение направлены в одну сторону, то тело разгоняется.

ПРИМЕР. *Движение тела задано уравнением* $x = 32t + 8 - 2t^2$. *Описать движение тела и найти его координату в момент остановки.*

И опять сначала переписываем уравнение в стандартном виде $x = 8 + 32t - 2t^2$ и только потом сравниваем уравнение движения с эталонным. Легко увидеть, что $x_0 = 8$ м, $\vartheta_{0x} = 32\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, a = -4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Таким образом, тело начало движение из точки, лежащей на 8 м правее начала координат со скоростью 32 м/с.

Поскольку начальная скорость направлена по оси ОХ, а ускорение – **против**, то тело тормозит. Составим уравнение для скорости движения тела. Нам известно, что $\vartheta = \vartheta_0 + at$. Нас интересует момент времени, когда тело остановится, (то есть его скорость обратится в нуль). Подставляем найденные численные данные, и получаем $0 = 32 - 4t$. Отсюда легко находим момент остановки t=8 с, подставляем его в уравнение для координаты и окончательно получаем: $x_{\text{ост}} = 136$ м.

ПРИМЕР. *Охарактеризуйте движения тел, графики проекций скоростей которых представлены на рисунке.*



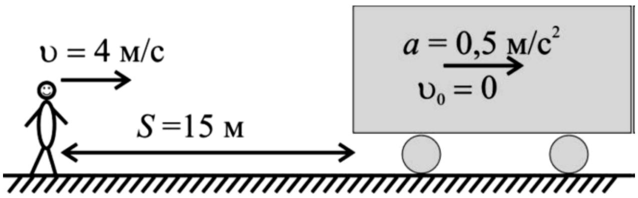
В момент времени t = 0 определим начальные скорости тел. Причем у 1, 2, 4 начальная скорость положительная, а у тела 3 начальная скорость отрицательная. По вертикальной оси ϑ определим, что максимальная начальная скорость у 4–го тела, а минимальная – у 3– го. У первого тела скорость постоянна на протяжении всего движения, то есть движение равномерное и прямолинейное. Второе и третье тело двигаются равноускоренно с ускорением $a > 0$. Четвертое тело двигается равно замедленно $a < 0$. Геометрический смысл ускорения

$$a = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{t} = tg\alpha$$

По углу наклона графика скорости можно сравнить ускорения тел: самое большое ускорение имеет 4 –*е* тело, минимальное ускорение имеет 2–е тело. У 1–го тела ускорение $a = 0$.

Точки пересечения графиков 3 и 4 с осью времени означают смену направления движения и скорости, то есть являются точками поворота тел. В этих точках тело останавливается и его мгновенная скорость равна нулю. После поворота тело двигается в противоположную первоначальному направлению движения сторону с таким же ускорением и с возрастающей скоростью.

ПРИМЕР. *Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона 15 м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением* $0{,}5\,\text{м/с}^2$. *Пассажир побежал со скоростью 4 м/с. Через какой промежуток времени пассажир достигнет двери вагона?*



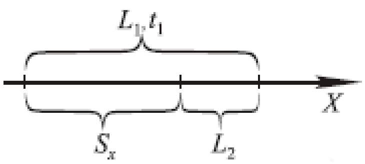
При решении задач о встрече двух тел удобно использовать координаты этих тел, а не их перемещения, так как в этом случае наиболее простой вид принимает условие встречи: в момент встречи координаты тел равны. Запишем координаты пассажира $x_1(t)$ и двери вагона $x_2(t)$ в зависимости от времени, считая начальную координату человека равной нулю

$$x_1 = \vartheta t$$

$$x_2 = S + \frac{at^2}{2}$$

где S – начальное расстояние между человеком и дверью вагона. Условие встречи $x_1 = x_2$ приводит к квадратному уравнению, которое имеет два корня: $t_1 = 6$ с, $t_2 = 10$ с. Ответом задачи является меньший корень, так как человек не будет пробегать мимо двери и ждать, когда она его догонит.

ПРИМЕР. *В системе единиц СИ зависимость от времени проекции* ϑ_x *вектора скорости точки, движущейся вдоль координатной оси OX, описывается уравнением* $\vartheta_x = 10 - 2t$. *Определите путь, пройденный точкой за 6,0 с.*



Поскольку проекция вектора скорости точки зависит от времени по линейному закону, точка двигается с постоянным ускорением, причем проекция на ось *OX* ее начальной скорости $\vartheta_0 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а проекция ускорения $a = -2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (см. рисунок). В момент времени $t_1 = -\frac{\vartheta_0}{a} = 5\text{ с}$ точка останавливается ($\vartheta = 0$), а затем двигается в обратном направлении. Поэтому $L = L_1 + L_2 = 2L_1 - S$, где $L1$ и $L2$ – пути, пройденные точкой до и после остановки, S – проекция перемещения точки. Путь

$$L_1 = -\frac{\vartheta_0^2}{2a}$$

проекция перемещения

$$S = \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Тогда

$$L = -\frac{\vartheta_0^2}{2a} - \left(\vartheta_0 t + \frac{at^2}{2}\right) = -\frac{10^2}{-2} - \left(10 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 6^2}{2}\right) = 26\text{ м}$$