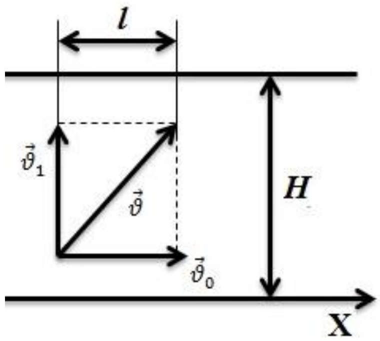
Относительность движения. Закон сложения скоростей

В задачах на относительность движения и сложение скоростей движение тел бывает, как правило, равномерным и прямолинейным, т. е. описывается достаточно простыми уравнениями. Тем не менее эти задачи смело можно отнести к труднейшим задачам механики. При решении таких задач пользуются правилом сложения классических скоростей, т. е. скоростей, значительно меньших скорости света в вакууме. Правило сложения классических скоростей: скорость тела относительно неподвижной системы отсчета (абсолютная скорость) равна сумме скорости относительно подвижной системы отсчета (собственной скорости) и скорости самой подвижной системы относительно неподвижной (переносной скорости). Рассмотрим несколько примеров, которые покажут вам, как можно приступить к решению подобных задач, с чего начать.

Начнем с задач на сложение скоростей, Любое движение тела может быть представлено как суперпозиция (наложение) двух разных независимых движений, в которых оно одновременно участвует. Если в задаче идет речь о движении тела в тоже движущейся среде, которая это тело увлекает за собой (лодка в реке, пассажир в движущемся поезде, человек на лестнице эскалатора и т. п.), то можно связать неподвижную систему отсчета с наблюдателем, который смотрит на все это со стороны, находясь, например, на берегу или на платформе. Движущуюся систему отсчета – реку, вагон, эскалатор, и т. п. – можно связать с другим неподвижным относительно этой среды наблюдателем, а движение самого тела – лодки, пассажира, человека, бегущего по эскалатору, и т. п. – рассматривать как суперпозицию двух движений: собственного и переносного, которые происходят одновременно, т. е. сколько времени оно само движется, столько времени его переносит среда.

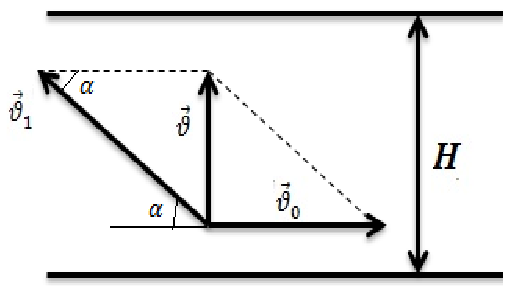
Рассмотрим пример на правило сложения скоростей. Пусть скорость течения реки $\vec{\vartheta}_0$, а скорость лодки, переплывающей эту реку, относительно воды равна $\vec{\vartheta}_1$ и направлена перпендикулярно берегу (рис.).



Лодка одновременно участвует в двух независимых движениях: она за некоторое время t переплывает реку шириной H со скоростью $\vec{\vartheta}_1$ относительно воды и за это же время ее сносит вниз по течению на расстояние l со скоростью течения $\vec{\vartheta}_0$. В результате лодка проплывает путь S со скоростью $\vec{\vartheta}$ относительно берега, равной по модулю: $\vartheta = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_0^2}$ за это же самое время t. Поэтому мы можем записать три уравнения движения, которые могут пригодиться в процессе решения подобных задач:

$$H = \vartheta_1 t$$
$$l = \vartheta_0 t$$
$$S = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_0^2}\, t$$

Зададим себе вопрос: под каким углом α к берегу должен грести гребец в лодке, чтобы оказаться на противоположном берегу, пройдя во время переправы минимальный путь? За какое время t этот путь будет пройден? С какой скоростью ϑ лодка пройдет этот путь?



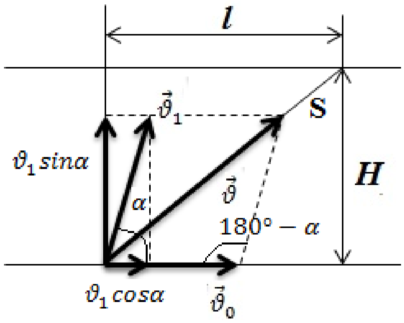
Чтобы ответить на все эти вопросы, рассмотрим внимательно рис. Очевидно, что минимальный путь, который может проплыть лодка, пересекая реку, равен ширине реки H. Чтобы проплыть этот путь гребец должен направить лодку под таким углом α к берегу, при котором вектор абсолютной скорости лодки $\vec{\vartheta}$ будет направлен перпендикулярно берегу. Тогда из прямоугольного треугольника на рис. найдем

$$cos\alpha = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}$$
$$\alpha = arccos\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)$$

Скорость ϑ определим из этого же треугольника по теореме Пифагора: $\vartheta = \sqrt{\vartheta_1^2 - \vartheta_0^2}$.

И наконец, время t, за которое лодка пересечет реку шириной H, двигаясь со скоростью ϑ, будет $t = \frac{H}{\vartheta}$.

Иногда в подобных задачах спрашивается, как надо направить лодку, чтобы переплыть реку за минимальное время? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно получить такую формулу, в которой время будет определено через постоянные величины $H, \vartheta_0, \vartheta_1$ и переменный угол α между вектором ϑ_1 и берегом, а затем подумать, при каком угле α время будет минимальным.



Давайте попытаемся ответить на этот вопрос. Пусть величины $H, \vartheta_0, \vartheta_1$ нам известны. Рассмотрим рис.

Пусть лодка пересекает реку под разными углами α. Мы видим, что, чем меньше угол α, тем больше скорость лодки $\vec{\vartheta}$. Но и тем больший путь придется ей проплыть. Теперь внимание! Лодка проплывет реку, пройдя путь S со скоростью ϑ за такое же время t, за какое она пересечет ширину реки H, двигаясь со скоростью $\vartheta_1 sin\alpha$. И за это же время t ее снесет вниз по течению на расстояние l со скоростью $\vartheta_0 + \vartheta_1 cos\alpha$. Таким образом, согласно принципу независимости движений справедливы следующие равенства:

$$S = \vartheta t$$
$$H = \vartheta_1 t sin\alpha$$
$$l = (\vartheta_0 + \vartheta_1 cos\alpha)t$$

где но правилу сложения скоростей скорость лодки относительно берега:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_0^2 - 2\vartheta_0\vartheta_1 cos(180° - \alpha)} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_0^2 + 2\vartheta_0\vartheta_1 cos\alpha}$$

Чтобы ответить на вопрос о минимальном времени, обратимся к формуле $H = \vartheta_1 t sin\alpha$, откуда $t = \frac{H}{\vartheta_{1sin\alpha}}$.

Так как здесь H и ϑ_1 постоянные, то время будет минимальным, когда синус угла α будет максимальным. Вы должны знать, что величина синуса может изменяться от нуля до единицы. Значит, максимальной величиной синуса является 1. Такому значению синуса соответствует угол $\alpha = 90°$. Значит, время будет минимальным, когда угол α между вектором $\vec{\vartheta}_1$ и берегом будет равен 90°, $t_{min} = \frac{H}{\vartheta_1}$ и $\alpha = 90°$.

Таким образом, чтобы переплыть реку за минимальное время, нужно грести перпендикулярно берегу (запомните, может пригодиться) (рис.). Вас при этом, правда, снесет вниз по течению, но зато потратите минимум времени. А вот если вы не хотите, чтобы вас снесло, надо грести под тупым углом к течению реки так, чтобы вектор результирующей скорости $\vec{\vartheta}$ был перпендикулярен берегу. Времени и сил при этом вы потратите больше, но зато высадитесь напротив того места, откуда отплыли.

Задачи на относительность движения тел связаны, как правило, с определением их относительной скорости или относительного положения. Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть два поезда движутся по параллельным путям в одном направлении с одинаковыми скоростями, например $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ относительно некоторого неподвижного наблюдателя, стоящего на платформе. Зададимся вопросом: какова их скорость относительно друг друга, т. е. с ка кой скоростью один поезд опережает второй? Очевидно, что эта относительная скорость равна нулю, ведь их скорости одинаковы. Если вы при этом будете сидеть у окошка одного из поездов, то вам будет казаться, что второй поезд не движется относительно вас. Это так и есть, ведь относительно вас он не изменяет своего положения.

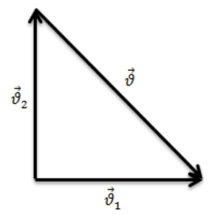
Теперь пусть ваш поезд увеличил свою скорость до $\vartheta_1 = 72\ \frac{км}{ч}$, а скорость второго поезда осталась неизменной. Какова теперь относительная скорость поездов, т. е. с какой скоростью ϑ ваш поезд будет обгонять соседний поезд? Очевидно, что относительная скорость поездов теперь равна разности их скоростей, так как второй поезд принять за неподвижный, то ваш поезд будет удаляться от него со скоростью

$$\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 = 12\ \frac{км}{ч}$$

Так будет, если поезда движутся сонаправленно. А если движутся навстречу друг другу, то их относительная скорость станет равна сумме скоростей ϑ_1 и ϑ_2. Действительно, если теперь второй поезд принять за неподвижный, то ваш поезд будет приближаться ко второму со своей собственной скоростью ϑ_1, да еще и со скоростью второго поезда ϑ_2, направленной ему навстречу. Поэтому теперь их относительная скорость $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 = 132\ \frac{км}{ч}$.

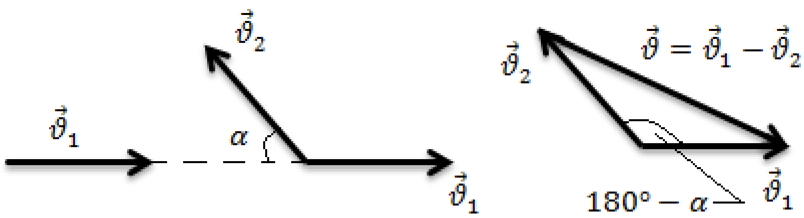
Приведенные примеры относительно просты, поскольку здесь тела движутся параллельным курсом. Сложнее определять относительную скорость, когда скорости тел направлены под углом друг к другу. Пусть, например, два тела движутся со взаимно перпендикулярными скоростями $\vec{\vartheta}_1$ и $\vec{\vartheta}_2$.

Для определения относительной скорости этих тел свяжем тело 2 с подвижной системой отсчета $X_1O_1Y_1$, т.е. будем считать, что скорость тела 2 $\vec{\vartheta}_2$ – это и есть скорость подвижной системы отсчета, или переносная скорость. Тогда скорость $\vec{\vartheta}_1$ тела 1 – это его скорость относительно неподвижной системы отсчета XOY, т.е. абсолютная скорость, а искомая относительная скорость $\vec{\vartheta}$ – это его скорость относительно подвижной системы отсчета. Согласно правилу сложения скоростей $\vec{\vartheta}_1 = \vec{\vartheta}_2 + \vec{\vartheta}$, откуда $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2$.



Таким образом, относительная скорость этих двух тел равна векторной разности их скоростей, а ее модуль можно определить по теореме Пифагора: $\vartheta = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}$.

Рассмотрим более сложный случай, когда тело 1 движется, например, горизонтально со скоростью $\vec{\vartheta}_1$, а тело 2 – под углом α к горизонту со скоростью $\vec{\vartheta}_2$.



Опять свяжем с телом 2 подвижную систему отсчета $X_1O_1Y_1$ и будем считать скорость этого тела, или, что то же самое, скорость подвижной системы $\vec{\vartheta}_2$ переносной скоростью, скорость тела 1 $\vec{\vartheta}_1$ – скоростью относительно неподвижной системы XOY, т.е. абсолютной, а скорость $\vec{\vartheta}$ – собственной скоростью тела 1 относительно подвижной системы или связанного с ней тела 2. Тогда, согласно правилу сложения скоростей $\vec{\vartheta}_1 = \vec{\vartheta}_2 + \vec{\vartheta}$, откуда $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2$.

Для определения модуля относительной скорости $\vec{\vartheta}$ воспользуемся теоремой косинусов. Поскольку в тупоугольном треугольнике, образованном векторами $\vec{\vartheta}_1$, $\vec{\vartheta}_2$, $\vec{\vartheta}$, угол, лежащий против вектора $\vec{\vartheta}$, равен $180° - \alpha$, то по теореме косинусов

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 cos(180° - \alpha)} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + 2\vartheta_1\vartheta_2 cos\alpha}$$